LÓGICA PROPOSICIONAL 1

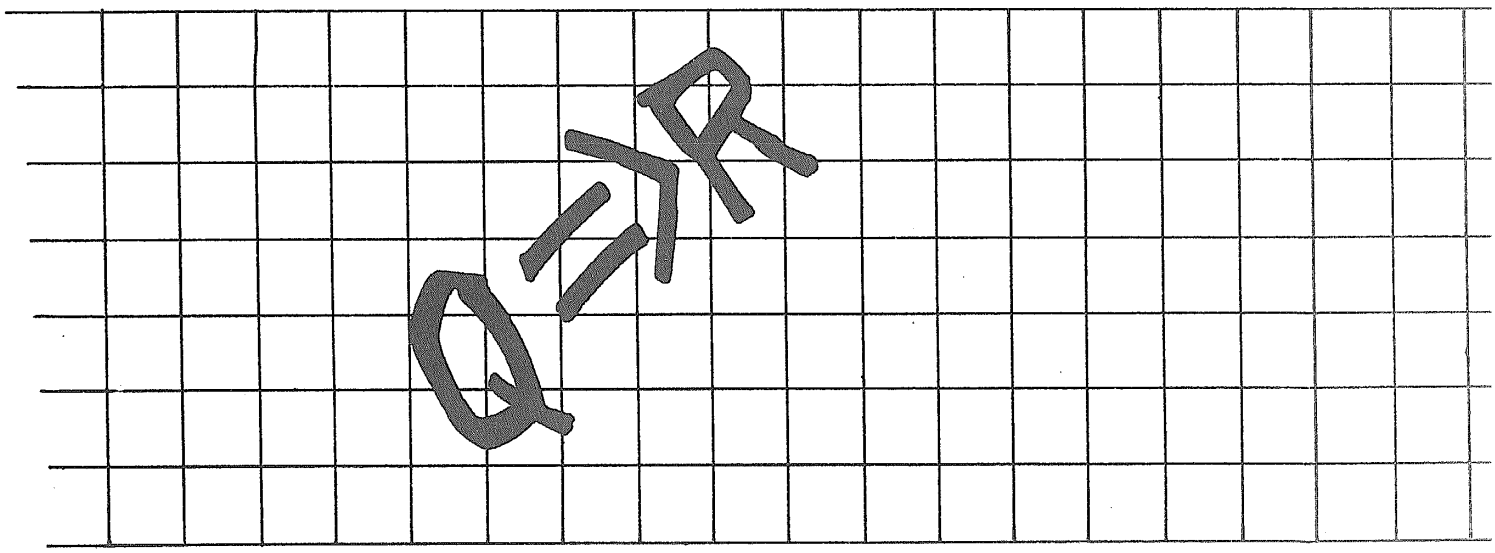
Proposiciones

Obras que integran el bloque 3 *(Nociones de lógica matemática):*

1. Lógica proposicional 1. Proposiciones
2. Lógica proposicional 2. Argumentos

ANUIES

Asociación Nacional de Universidades
e Institutos de Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 3

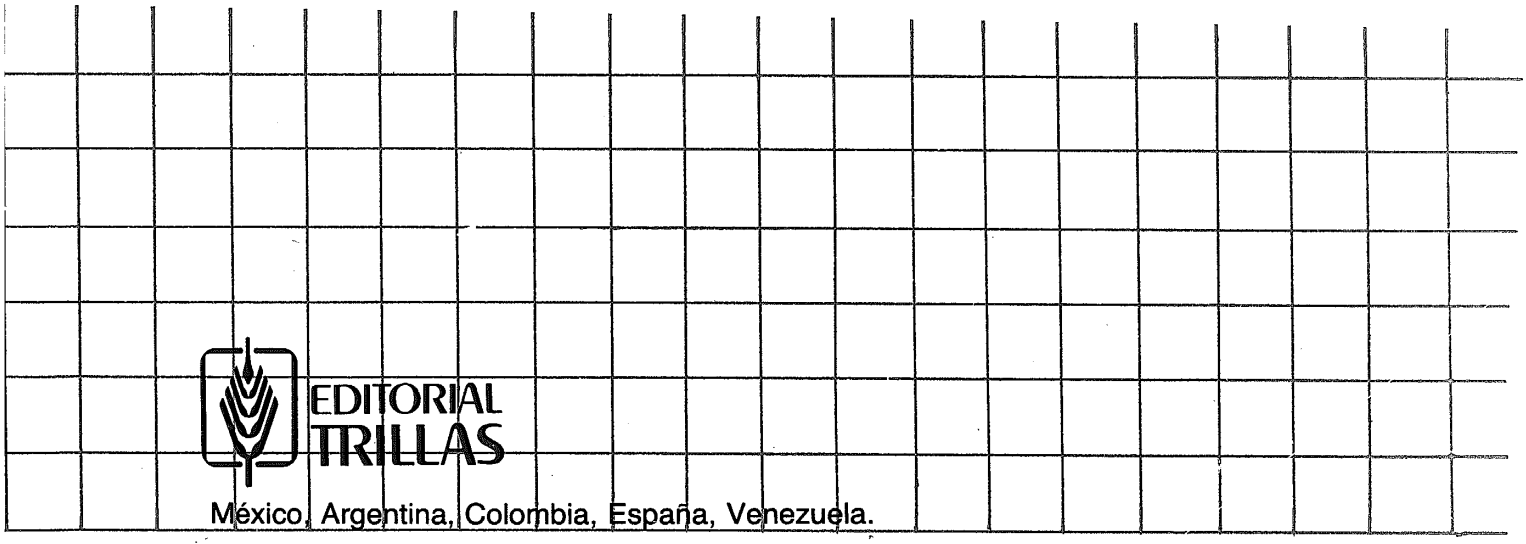
Nociones de lógica matemática

Módulo 1

LÓGICA PROPOSICIONAL 1

Proposiciones

Conrado Flores García



EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LÓGICA PROPOSICIONAL 1
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1984
ISBN 968-24-1238-2

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

1.1 Proposiciones simples

1.2 Proposiciones compuestas

1.3 La negación

1.4 La conjunción

1.5 La disyunción

1.6 La condicional

1.7 La bicondicional

1.8 Fórmulas y tablas de verdad de proposiciones compuestas

1.9 Tautología, contradicción y contingencia

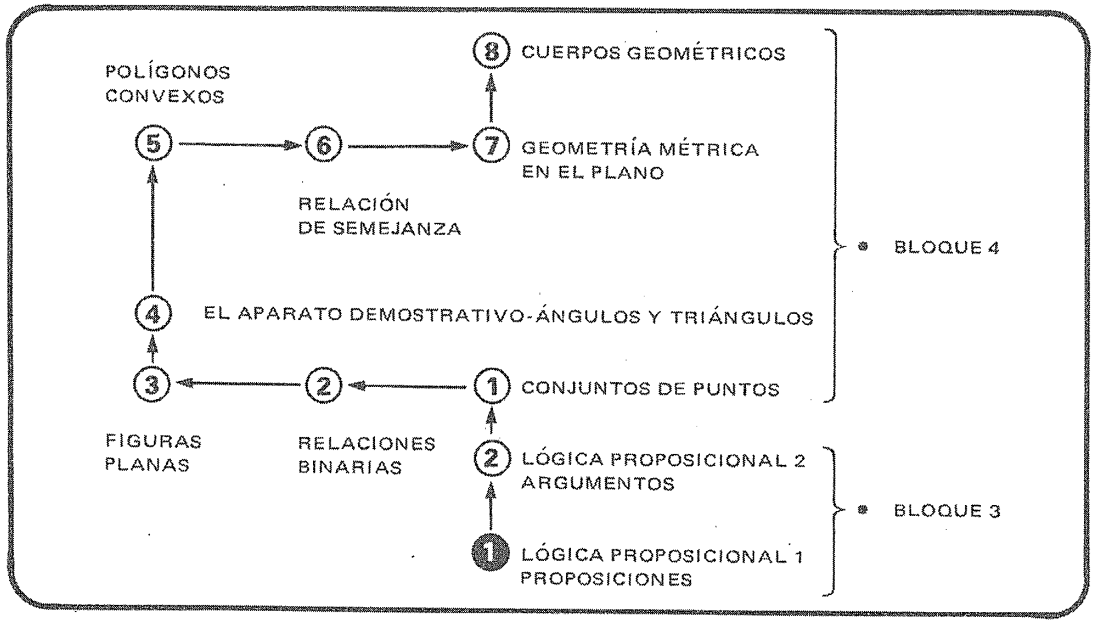
1.10 Implicación lógica y equivalencia lógica

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 3. Nociones de lógica matemática

Objetivos: representar simbólicamente proposiciones y argumentos sencillos expresados en lenguaje común, y determinar el valor de verdad de las primeras y la validez de los segundos

Esquema estructural del bloque 3



Módulo 1. Lógica proposicional 1. Proposiciones

Objetivos: representar simbólicamente proposiciones expresadas en lenguaje común y determinar su valor de verdad

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo
• Saber leer y escribir, y mucho entusiasmo		

1.1

Proposiciones simples

1

Si decimos, por ejemplo,

México está en América,

estamos expresando algo
que puede ser

verdadero
o
falso.

2

De acuerdo con nuestros conocimientos
de geografía
sabemos que la expresión

México está en América,

es [_____]
verdadera/falsa

verdadera

3

Llamamos

proposición

a una aseveración
en la que

afirmamos
o
negamos

algo que puede ser

verdadero
o
falso.

4

A través de la

proposición

México está en América,

estamos [_____]
afirmando/negando

algo que es [_____]
verdadero/falso

afirmando

verdadero

5

En la proposición

245 es un número par,

estamos [_____]
afirmando/negando

algo que, por nuestros conocimientos matemáticos,

sabemos que es [_____]
verdadero/falso

afirmando

falso

6

Si decimos:

Los gatos no son mamíferos,

estamos expresando
una proposición
en la que [afirmamos/negamos]

algo que, por nuestros conocimientos de zoología,
sabemos que es [verdadero/falso]

negamos

verdadero

7

A través de la proposición

Los gatos no son mamíferos,

estamos negando algo que aceptamos como
verdadero.

Decimos, entonces, que tal proposición es
[verdadera/falsa]

falsa

8

La expresión

$3 \not> 5$

se lee [_____]

y representa una proposición
en la que [afirmamos/negamos]

algo que hemos aceptado como [verdadero/falso]

tres no es mayor que
cinco

negamos

falso

9

Podemos decir, entonces, que
la proposición representada por la expresión

$3 \not> 5$

es [_____]
verdadera/falsa

al negar algo que aceptamos como falso.

verdadera

10

Resumiendo.

México está en América	V/F
245 es un número par	V/F
Los gatos no son mamíferos	V/F
3 ≯ 5	V/F

Señalar la opción correcta.

V
F
F
V

11

Decimos que el

valor de verdad

de la proposición representada por la oración

México está en América,

es

verdadero (V)*

*Se suele representar el valor de verdad "verdadero"
con el símbolo 1 y el valor de verdad "falso"
con el símbolo 0.

12

El valor de verdad

de la proposición representada por la expresión

$$3 = 5$$

es

└_____┘ └___┘

falso F

13

Indiquemos el
valor de verdad de la proposición
representada:

$5 + 3 = 12$	V/F
$\frac{3}{4}$ *no es un número entero.*	V/F
La tierra $\in \{$*planetas del Sistema Solar*$\}$	V/F
25 *no es un múltiplo de* 5.	V/F

F
V
V
F

3.1.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

14

Aceptaremos que
el valor de verdad de una proposición es:

verdadero
o
falso,

es decir:
una proposición no podrá ser al mismo tiempo:

verdadera y falsa.

15

Como hemos podido darnos cuenta, una

proposición

puede ser representada por medio de una

oración gramatical,

por ejemplo: *México está en América,*

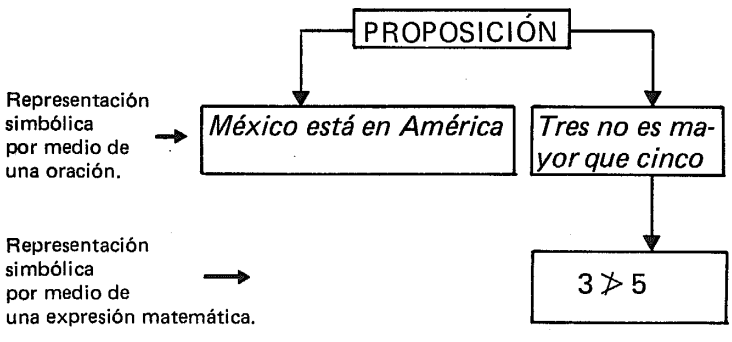
o por medio de una

expresión matemática

por ejemplo: **3 ⊁ 5.**

16

Estudiar con atención.



17

Cuando,
por razones de brevedad,
hablamos de
"la proposición: **México está en América.**"

o de

"la proposición: **3 ⊁ 5**"

debemos entender
que nos estamos refiriendo a
"la proposición representada por la oración
México está en América"
o a "la proposición representada por la expresión 3 ⊁ 5".

18

Ahora bien,
no todas las oraciones gramaticales
representan proposiciones.

De las oraciones:

1. El amor es una cosa esplendorosa.
2. ¡Maldita sea mi suerte!
3. ¿Qué pasó con el bebé de Rosamaría?
4. No me molestes más.

Sólo la señalada con el número 1
representa una proposición,
porque es la única en la que se afirma o se niega
algo que puede ser verdadero o falso.

1

19

Recordamos,
de nuestros estudios de la gramática,
que:

El amor es una cosa esplendorosa,

es una

oración declarativa (o aseverativa)

20

¡Maldita sea mi suerte!
es una

oración [_____]

¿Qué pasó con el bebé de Rosamaría?
es una

oración [_____]

No me molestes más
es una

oración [_____]

exclamativa (admirativa)

interrogativa

imperativa

21

Sólo en las oraciones [_____]
se afirma o se niega algo
que
puede ser verdadero o falso;
por lo tanto, tales oraciones
son las únicas que pueden ser representativas
de [_____]

declarativas (aseverativas)

proposiciones

22

Tampoco
una

frase

como por ejemplo:

Todos los hombres del mundo

puede ser representativa de una proposición,
puesto que [_____]

a través de ella
no se afirma o se niega
algo que
puede ser verdadero o
falso

23

Señalar las expresiones que son representativas de proposiciones.

1. Los cuatro jinetes del Apocalipsis.
2. ¡Cuán verde era mi valle!
3. No me abandones.
4. ¿Por quién doblan las campanas?
5. Hace frío en invierno.

5

24

Señalar las expresiones que representan proposiciones.

1. $3(2^2 + 1)$
2. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3. $\{x/x$ es un número entero$\}$
4. $5 \in Z^*$
5. 54 no es divisible entre 3

(*) $Z = \{x/x$ es un número entero$\}$

2

4
5

3.1.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

3.1.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de proposición;
- *decir* si una proposición simple, representada por una oración o por medio de una expresión matemática, es verdadera o falsa;
- *decir* si una expresión, dada en lenguaje común o matemático, es o no representativa de una proposición.

1.2

Proposiciones compuestas

25

De acuerdo con nuestra definición,
la oración

Cuernavaca está en México y México está en América,

representa/no representa

una proposición,
porque [_____]

representa

en ella se afirma
o niega algo que
puede ser verdadero o
falso.

26

Cuernavaca está en México

México está en América

son

proposiciones simples.*

*También llamadas elementales o atómicas.

27

Cuernavaca está en México y México está en América,

es una

proposición compuesta*

* Llamada también molecular.

28

Cuernavaca está en México y México está en América,

es una

proposición compuesta,

formada por las proposiciones simples:

Cuernavaca está en México,
México está en América,

y el

conectivo "y"

29

Los domingos salgo al campo o me quedo descansando en casa

es una

proposición compuesta,

formada por las proposiciones simples:

└_____┘

└_____┘

y el conectivo └_____┘

Los domingos salgo al campo

Los domingos me quedo descansando en casa

o

30

Estas camisas son baratas pero poco durables

es una
proposición compuesta.

Las proposiciones simples que la forman
son:
└_____┘

└_____┘

y el conectivo es└___┘

Estas camisas son baratas

(Estas camisas son) poco durables

pero

31

Pienso, luego existo

es una proposición compuesta.

Proposiciones simples
que la forman: └_____┘

└_____┘

Conectivo: └_____┘

(Yo) pienso

(Yo) existo

Luego

32

Si no traes el dinero, entonces no vengas

es una └_____┘

Proposiciones simples
que la forman: └_____┘

└_____┘

Conectivo: └___┘

proposición compuesta

(Tú) no traes el dinero
No vengas

Si...entonces

33

La proposición compuesta:

Si vienes esta tarde, iremos al cine o al teatro y veremos un buen programa de televisión

está formada por las proposiciones simples:

(Tú) vienes esta tarde
(Nosotros) iremos al cine
(Nosotros iremos) al teatro
(Nosotros) veremos un buen programa de televisión

y los conectivos

si, o, y

34

A una proposición compuesta como:

No es cierto que el dinero compra la felicidad

la consideramos formada por la proposición simple:

el dinero compra la felicidad,

y el conectivo:

No es cierto que

35

Debemos observar que, decir:

No es cierto que *el dinero compra la felicidad*

equivale a decir que:

El dinero **no** *compra la felicidad.*

36

Vemos, entonces, que una

proposición compuesta

puede estar formada por dos o más

proposiciones simples

ligadas por ciertos

conectivos,

tales como:

y; o; si...entonces; pero; luego; etc.,

37

También una proposición compuesta
puede estar formada por una:

proposición simple

y algún conectivo como:

no es cierto que,

no es el caso que, no se cumple que,

es falso que,

etc.

3.1.2.1

Práctica adicional
de
análisis y formación
de
proposiciones compuestas,
si se considera necesario.

38

Aunque,

en el lenguaje común

es posible formar

una gran variedad de

proposiciones compuestas,

en lógica
se considera
un limitado número
de formas típicas.

39

Consideremos dos proposiciones simples,
por ejemplo:

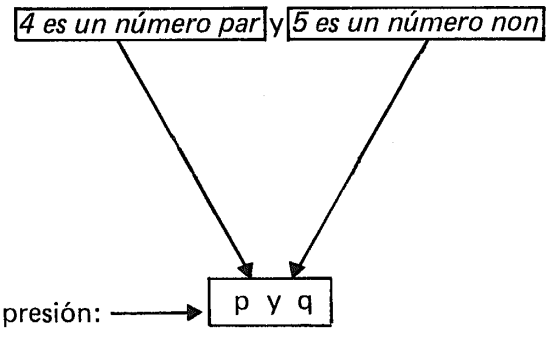
4 es un número par,
5 es un número non,

y formemos una proposición compuesta,
utilizando el conectivo "**y**"

4 es un número par y
5 es un número non

40

Si simbolizamos
con la letra
p
a la primera
proposición
y
con la letra
q
a la segunda
obtenemos la expresión:



41

La expresión

p y q

es un ejemplo de lo que llamaremos:

forma
o
estructura lógica.

42

Otra forma o estructura lógica
sería la expresión

p o q

Si **p** y **q** representan las mismas proposiciones del cuadro 40, leemos:

4 es un número par
o 5 es un número non.

43

Si **p** entonces **q**

es otra forma lógica.

En palabras, teniendo **p** y **q** los mismos significados de los cuadros anteriores:

Si 4 es un número par
entonces 5 es un número non.

44

p si, y sólo si **q**

es una forma lógica más.

Un

ejemplo de sustitución

de esta forma lógica
es la proposición:

└──────────────────────────────────────┘

en que **p** y **q** representan a las mismas
proposiciones simples de los cuadros anteriores.

4 es un número par si, y sólo si 5 es un número non

45

Tenemos, así, las siguientes
4 formas lógicas:

- **p** y **q**
- **p** o **q**
- si **p** entonces **q**
- **p** si, y sólo si **q**

que llamamos

binarias.

46

En una forma binaria,
aparecen ligadas

dos

proposiciones simples
por medio de lo que llamaremos un

conectivo lógico.

47

En la forma lógica **p** y **q**
el conectivo lógico es: ⌊___⌋

y

48

En la forma lógica si **p** entonces **q**
el conectivo lógico es: ⌊_____⌋

si...entonces

49

En la forma lógica **p** si, y sólo si **q**
el conectivo lógico es: ⌊_____⌋

si, y sólo si (sii)

50

Consideremos, además,
la forma lógica: No es cierto que **p**
un ejemplo de sustitución de la cual
sería:
└_____┘

si **p** simboliza a la proposición: *"4 es un número par."*

No es cierto que 4 es un número par

51

En la forma lógica: No es cierto que **p**
el conectivo lógico* es:└_____┘

*Se acostumbra llamar "conectivo lógico" a la partícula "no es cierto que", a pesar de que no "conecte" o ligue dos proposiciones, como sucede con los otros conectivos.

No es cierto que

52

De acuerdo con lo anterior,

¿Es: No es cierto que **p**
una forma lógica binaria?

Sí/No

No

53

No es cierto que **p**
es una

forma lógica monaria,

porque en ella aparece

una

sola

proposición simple

afectada del conectivo lógico ¬

No es cierto que

54

Estudiaremos las siguientes

formas o estructuras lógicas:

Monaria *No es cierto que* p

Binarias

- p y q
- p *o* q
- *si* p *entonces* q
- p *si, y sólo si* q

3.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de proposición compuesta;
- *explicar* en qué consiste una forma o estructura lógica;
- *señalar,* en una proposición compuesta dada, las proposiciones simples que la forman y los conectivos lógicos que intervienen;
- *formar* proposiciones compuestas de una forma lógica dada, a partir de proposiciones simples dadas;
- *discriminar* entre una forma lógica binaria y una monaria;
- *dar* algunas formas lógicas binarias o monarias.

1.3

La negación

55

Consideremos la proposción

Cinco es mayor que dos,

que sabemos que es [verdadera/falsa]

verdadera

56

Ahora bien,

queremos

negar

la proposición

Cinco es mayor que dos,

lo cual podemos hacer, diciendo:

[ ]

Algunas posibles maneras de negar la proposición dada:

No es cierto que
Es falso que
No es el caso que
No se cumple que
etcétera;

} cinco es mayor que dos

o bien,

Cinco *no* es mayor que dos

57

Sabemos que la proposición

Cinco es mayor que dos,

puede ser simbolizada
matemáticamente así: ⌊_____⌋

Asimismo, la proposición:

Cinco no es mayor que dos,

la simbolizamos así ⌊_____⌋

$5>2$

$5\not>2$

58

Ahora bien,
si simbolizamos con **p**

la proposición *cinco es mayor que dos*

vamos a convenir
en utilizar el símbolo $\sim$**p**

para la proposición:

No es cierto que *cinco es mayor que dos*

o
Cinco **no** *es mayor que dos.*

59

La expresión

$\sim$**p**

deberá, entonces, leerse:

⌊_____⌋

No es cierto que
Es falso que
No es el caso que
No se cumple
etcétera
} p

o bien, simplemente:

No p

60

El conectivo lógico $\sim$
precediendo a una proposición **p**
establece la forma lógica monaria

$\sim$**p**

que llamaremos

negación.

61

Un ejemplo de sustitución de la negación

$\sim$**p**

es la proposición compuesta:

No es cierto que cinco es mayor que dos.

62

Hemos aceptado que
la proposición
Cinco es mayor que dos,
es verdadera.

Ahora bien,

la proposición
No es cierto que cinco es mayor que dos,

es [ ]
verdadera/falsa

falsa

63

Si **p** representa a la proposición simple

Cinco es igual a dos,

que es ⌊_____⌋
verdadera/falsa

La proposición compuesta ∼**p**
se leería: ⌊_____⌋

y es ⌊_____⌋
verdadera/falsa

falsa

No es cierto que cinco es igual a dos

verdadera

64

p representa, ahora, a la proposición

$\frac{3}{4}$ *no es un número entero*
que es ⌊__⌋
V/F

∼**p** representa a la proposición:
⌊_____⌋

que es ⌊__⌋
V/F

V

No es cierto que
$\frac{3}{4}$ *no es un número entero*

F

65

p: *Seis no es número par*

valor de verdad ⌊__⌋
V/F

∼**p** ⌊_____⌋

valor de verdad ⌊__⌋
V/F

F

No es cierto que
seis no es un número par

V

66

Observamos que

si **p** es **verdadera**

$\sim$**p** es [falsa]

Si **p** es **falsa**

$\sim$**p** es [verdadera]

67

Las observaciones del cuadro anterior
las podemos resumir
en el siguiente esquema,

p	$\sim$p
V	F
F	V

al que daremos el nombre de

Tabla de verdad de la negación.

68

Si asignamos a **p** el valor de verdad **V**
corresponderá a $\sim$**p** el valor de verdad [F].

Si asignamos a **p** el valor de verdad **F**
corresponderá a $\sim$**p** el valor de verdad [V].

69

Ahora,

consideremos la proposición simple:

35 es múltiplo de 5

y usemos el símbolo **p** para representarla.

El valor de verdad de **p** es ⌊____⌋
V/F

V

70

p representa a la proposición:

35 es múltiplo de 5;

$\sim$**p** representa a la proposición:

⌊_____⌋

Valor de verdad de $\sim$**p** ⌊____⌋
V/F

No es cierto que
35 es múltiplo de 5
o
35 no es múltiplo de 5

F

71

Ahora bien,

Si $\sim$**p** representa a la proposición:

35 no es múltiplo de 5;

$\sim\sim$**p** representaría a la proposición:

⌊_____⌋

No es cierto que
35 no es múltiplo de 5

72

Atención.

	valor de verdad	
p: *35 es múltiplo de 5.*	V/F	V
$\sim$**p:** *35 no es múltiplo de 5.*	V/F	F
$\sim\sim$**p:** *No es cierto que 35 no es múltiplo de 5.*	V/F	V

73

El conectivo $\sim\sim$ que se lee:

no es cierto que ... no

establece la forma lógica

$\sim\sim$**p**

No es cierto que no p

a la que llamamos

doble negación.

74

Observemos con atención.

$\sim\sim$**p** No es cierto que no **p**

75

Si **p** es **V** $\sim$**p** es ⌊⌋ $\sim\sim$**p** es ⌊⌋

Si **p** es **F** $\sim$**p** es ⌊⌋ $\sim\sim$**p** es ⌊⌋

F V

V F

76

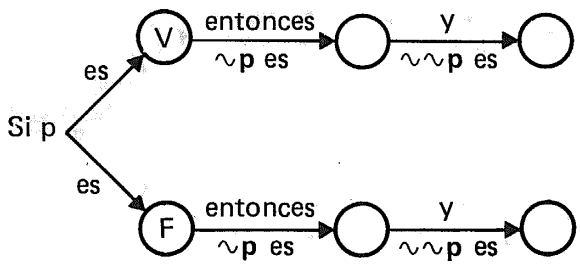
Tabla de verdad de la doble negación

p	$\sim\sim$p
V	
F	

V
F

77

Completemos el siguiente esquema.



F V

V F

3.1.3.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

3.1.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las fórmulas de las formas lógicas monarias llamadas negación y doble negación;
- *dar* las tablas de verdad de la negación y doble negación;
- *formar* una proposición compuesta de alguna de las formas lógicas negación o doble negación, a partir de una proposición simple dada;
- *dar* el valor de verdad de una negación o doble negación, a partir del valor de verdad asignado a la proposición simple que la forma.

1.4

La conjunción

78

Dadas las dos proposiciones simples:

Pedro juega futbol
Gabriel se dedica al estudio

podemos formar las siguientes proposiciones compuestas:

Pedro juega futbol { pero / mientras que / en tanto que / sin embargo } *Gabriel se dedica al estudio.*

79

Para los fines de la lógica,
cualquiera de las proposiciones del cuadro anterior
puede ser puesta en la forma:

Pedro juega futbol

y

Gabriel se dedica al estudio.

80

El conectivo lógico **y**
ligando a las proposiciones **p y q**
determina
la forma lógica binaria

p y q

que llamamos

conjunción.

81

Fórmula de la conjunción: $p \wedge q$
que leemos: "p y q"

82

Atención.

Si es cierto que
Pedro juega futbol,
y es cierto que
Gabriel se dedica al estudio,
entonces,
es cierto que
Pedro juega futbol y
Gabriel se dedica al estudio

83

Atención. Señalar la opción correcta.

Si es cierto que
Pedro juega futbol
pero,
no es cierto que
Gabriel se dedique al estudio,
entonces,

es/no es cierto que
Pedro juega futbol y
Gabriel se dedica al estudio.

no es

84

Si no es cierto que
Pedro juegue futbol
pero,

es cierto que
Gabriel se dedica al estudio;
entonces,

es/no es cierto que

Pedro juega futbol
y Gabriel se dedica
al estudio.

no es

85

Si no es cierto que
Pedro juegue futbol
y

no es cierto que
Gabriel se dedique al estudio
entonces,

es/no es cierto que

Pedro juega futbol y
Gabriel se dedica al
estudio.

no es

86

Si **p** es **V** y **q** es **V** **p ∧ q** es ⌊____⌋

Si **p** es **V** y **q** es **F** **p ∧ q** es ⌊____⌋

Si **p** es **F** y **q** es **V** **p ∧ q** es ⌊____⌋

Si **p** es **F** y **q** es **F** **p ∧ q** es ⌊____⌋

V

F

F

F

87

Tabla de verdad de la conjunción.

p	q	p ∧ q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Completar.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

88

Observemos que:

p ∧ q

es verdadera siempre que

p y q

sean ambas verdaderas.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

89

Basta que
alguna de las
proposiciones simples

p o q

sea falsa
para que la
proposición compuesta

p ∧ q

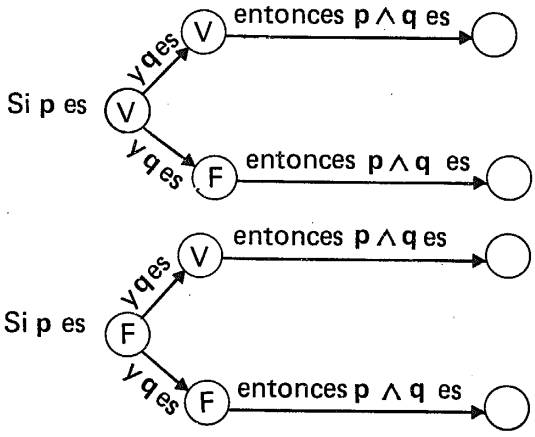
sea ⌊_____⌋

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

falsa

90

Completar.



V

F

F

F

91

Sean $\begin{cases} p: & 2 + 3 = 5 \\ q: & -5 < 0 \end{cases}$

con los siguientes valores de verdad:

- p: ⌊_____⌋
- q: ⌊_____⌋

V

V

92

La fórmula de la forma lógica correspondiente a la proposición compuesta

$$2 + 3 = 5 \wedge -5 < 0$$

es ⌊_____⌋

$p \wedge q$

93

La proposición:

$$2 + 3 = 5 \wedge -5 < 0$$

es un ejemplo de sustitución de la forma lógica binaria:

$$p \wedge q$$

llamada **conjunción.**

94

Puesto que:

$2 + 3 = 5$ es V
y
$-5 < 0$ es V

$2 + 3 = 5 \wedge -5 < 0$ es ⌊___⌋

V

95

La proposición compuesta:

$2 + 3 = 5 \wedge - 5 < 0$

tiene un valor de verdad V

$2 + 3 = 5 \wedge - 5 \not< 0$

tiene un valor de verdad [ ]
puesto que las proposiciones simples que la forman tienen los siguientes valores de verdad:

$2 + 3 = 5$ [ ]

$- 5 \not< 0$ [ ]

F

V

F

96

La proposición compuesta:

$2 + 3 \neq 5 \wedge - 5 < 0$

tiene un valor de verdad [ ]
puesto que:

$2 + 3 \neq 5$ [ ]

$- 5 < 0$ [ ]

F

F

V

97

La proposición compuesta:

$2 + 3 \neq 5 \wedge - 5 \not< 0$

tiene valor de verdad [ ]
ya que:

$2 + 3 \neq 5$ [ ]

$- 5 \not< 0$ [ ]

F

F

F

98

Hemos visto que:

si: $\begin{cases} p: & 2+3=5 \\ q: & -5<0 \end{cases}$

la fórmula de la forma lógica correspondiente a

$$2+3=5 \wedge -5<0$$

es ⌊_____⌋

$p \wedge q$

99

Atención.

si $\begin{cases} p: & 2+3=5 \\ q: & -5<0 \end{cases}$

la fórmula de la forma lógica correspondiente a

$$2+3=5 \wedge -5 \not< 0$$

sería ⌊_____⌋

$p \wedge \sim q$

100

Si $\begin{cases} p: & 2+3=5 \\ q: & -5<0 \end{cases}$

La fórmula de la forma lógica correspondiente a

$$2+3 \neq 5 \wedge -5<0$$

sería ⌊_____⌋

$\sim p \wedge q$

101

Si $\begin{cases} p: & 2+3=5 \\ q: & -5<0 \end{cases}$

La fórmula de la forma lógica correspondiente a

$$2+3\neq 5 \wedge -5 \not< 0$$

sería ⌊_____⌋

$\sim p \wedge \sim q$

102

Indiquemos las expresiones y los valores de verdad faltantes.

p: $2+3=5$ V
q: $-5<0$ V

$\sim p$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$\sim q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$p \wedge q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$p \wedge \sim q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$\sim p \wedge q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$\sim p \wedge \sim q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋

$2+3\neq 5$	F
$-5 \not< 0$	F
$2+3=5 \wedge -5<0$	V
$2+3=5 \wedge -5 \not< 0$	F
$2+3\neq 5 \wedge -5<0$	F
$2+3\neq 5 \wedge -5 \not< 0$	F

103

p: 25 es un número real. ⌊___⌋
q: 25 es múltiplo de 3. ⌊___⌋

$\sim p$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$\sim q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$p \wedge q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$p \wedge \sim q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$\sim p \wedge q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋
$\sim p \wedge \sim q$:	⌊_____⌋	⌊___⌋

V
F

25 no es un número real o es falso que 25 es un número real	F
25 no es múltiplo de 3	V
25 es número real y múltiplo de 3	F
25 es un número real y no es múltiplo de 3	V
25 no es un número real y es múltiplo de 3	F
25 no es un número real ni es múltiplo de 3	F

3.1.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

104

Completar la siguiente tabla de verdad.

p	q	∼q	p ∧ ∼q
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

p	q	∼q	p ∧ ∼q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

105

Completar la siguiente tabla de verdad.

p	q	∼p	∼p ∧ q
	V		
	F		
	V		
	F		

p	q	∼p	∼p ∧ q
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

106

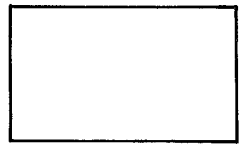
Completar la siguiente tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \quad \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

107

Construir la tabla de verdad de $p \wedge p$



p	p	$p \wedge p$
V	V	V
F	F	F

108

Construir la tabla de verdad de $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

109

Observemos con atención que esta tabla de verdad nos indica que una proposición de la forma

$p \wedge \sim p$

p	∼p	p ∧ ∼p
V	F	F
F	V	F

es siempre [verdadera/falsa]

independientemente de lo que signifique **p**

falsa

110

Decimos que la proposición

$p \wedge \sim p$

es falsa por su forma;

o que

es falsa, independientemente de su contenido.

111

Cualquier ejemplo de sustitución de la fórmula

$p \wedge \sim p$

por ejemplo:

Pedro tiene 15 años y Pedro no tiene 15 años

será [verdadero/falso]

falso

Enrique es un pemuante y Enrique no es un pemuante

es una proposición [verdadera/falsa]

por su [forma/contenido]

independientemente de lo que pueda significar la palabra "pemuante".

falsa

forma

3.1.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de la forma lógica binaria llamada conjunción;
- *representar* simbólicamente una conjunción;
- *construir* la tabla de verdad de la conjunción;
- *dar* los enunciados de $\sim p$, $\sim q$, $p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$ con sus correspondientes valores de verdad, a partir de las proposiciones simples p y q;
- *construir* las tablas de verdad de $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge p$ y $p \wedge \sim p$;
- *explicar* cómo ciertas proposiciones compuestas pueden ser verdaderas o falsas por su forma lógica, independientemente de su contenido.

1.5

La disyunción

113

Tomemos las dos proposiciones simples:

Pedro juega futbol
Gabriel se dedica al estudio

y liguémoslas por medio del conectivo "o"
para formar la proposición compuesta:

Pedro juega futbol o *Gabriel se dedica al estudio.*

114

La proposición

Pedro juega futbol o Gabriel se dedica al estudio,

puede interpretarse de dos maneras.
Su significado es ambiguo.

115

Una interpretación de la proposición

Pedro juega futbol o Gabriel se dedica al estudio:

se verifica alguna de estas tres cosas

- *Pedro juega futbol*
- *Gabriel se dedica al estudio*
- *Pedro juega futbol y Gabriel se dedica al estudio.*

116

Otra interpretación de la proposición

Pedro juega futbol o Gabriel se dedica al estudio:

se verifica alguna de estas dos cosas:

- *Pedro juega futbol*
- *Gabriel se dedica al estudio*

pero se *excluye* la posibilidad de que:

- *Pedro juegue futbol y Gabriel se dedique al estudio*

117

Si lo que queremos dar a entender es que:

- *Pedro juega futbol*
  o bien,
- *Gabriel se dedica al estudio*
  o bien,
- *Pedro juega futbol y Gabriel se dedica al estudio*

utilizamos el símbolo $\vee$ para representar al conectivo lógico **"o"** y escribimos:

Pedro juega futbol $\vee$ *Gabriel se dedica al estudio.*

118

A la forma lógica
representada por la fórmula
$p \vee q$
le llamaremos

disyunción inclusiva,

ya que

incluye

la posibilidad $p \wedge q$

119

Si lo que queremos significar
es que "no hay más que dos sopas",
es decir:

O Predro juega futbol
o Gabriel se dedica al estudio

utilizaremos el símbolo $\veebar$
para representar al conectivo lógico **"o"**
y escribimos:
Pedro juega futbol $\veebar$ *Gabriel se dedica al estudio.*

120

A la forma lógica
representada por la fórmula
$p \veebar q$
le llamaremos

disyunción exlusiva,

ya que

excluye

la posibilidad $p \wedge q$

121

Consideraremos,
entonces,
dos formas de **disyunción.**

Disyunción inclusiva $p \vee q$

Disyunción exclusiva $p \veebar q$

122

Para que $p \vee q$ sea verdadera

se requiere que: **p** sea verdadera,

o bien, que: [_____]

o bien, que: [_____]

q sea verdadera

p y q

sean ambas verdaderas

123

En otras palabras;

para que

$p \vee q$

sea

verdadera

se requiere que
al menos una de las proposiciones p o q
sea [_____]
verdadera/falsa

verdadera

124

Quiere decir que
una proposición de la forma

$p \vee q$

será

falsa

cuando [_____]

p y q
sean ambas falsas

125

Consideremos la proposición:

$5 \in R \vee$ **5 es un número par***

que podemos leer,
en forma abreviada:

[_____]

(*) $R = \{x/x \text{ es un número real}\}$

por ejemplo:

5 es número real o par

126

La proposición

$5 \in R \vee$ **5 es un número par**

es [_____]
verdadera/falsa

porque:

[_____]

verdadera

al menos una de las dos proposiciones componentes es verdadera.

En efecto:

$5 \in R$ es verdadera

(no importa que: 5 es un número par no sea verdadera).

127

La proposición

$$2 \in R \vee 2 > 0$$

es _____
verdadera/falsa

porque:

_____

verdadera

al menos una de las dos proposiciones componentes es verdadera.

En efecto:

$2 \in R$ es verdadera,
o bien,
$2 > 0$ es verdadera.

También se cumple que:

$2 \in R$ y $2 > 0$ son ambas verdaderas.

128

La proposición

$$8 = 1 \vee 5 > 3$$

es _____
verdadera/falsa

porque:

_____

verdadera

al menos una de las dos proposiciones componentes es verdadera.

En efecto:

$5 > 3$ es verdadera.

129

La proposición

$$5 < 0 \vee 7 = 3$$

es _____
verdadera/falsa

porque:

_____

falsa

ambas proposiciones componentes son falsas.

En efecto:

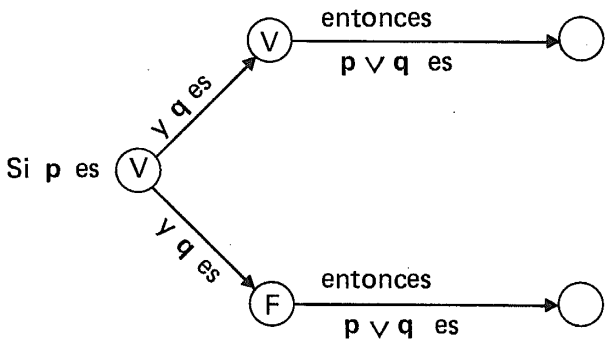
$5 < 0$ y $7 = 3$ son ambas falsas.

3.1.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

130

Completemos el siguiente esquema.

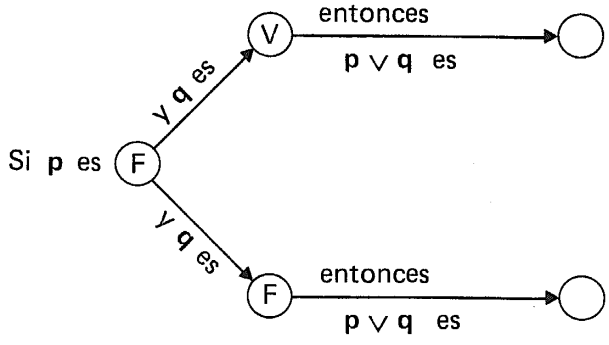


V

V

131

Completemos.



V

F

132

Estamos preparados
para construir la
tabla de verdad de

$p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

133

Tabla de verdad de la disyunción inclusiva.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

134

Ahora,

consideremos una proposición
de la forma lógica binaria:

$p \veebar q$

a la que hemos llamado

_____

disyunción exclusiva

135

Atención.

Para que una proposición de la forma

$p \vee q$

sea

verdadera,

se requiere que:

_____

p sea verdadera y
q falsa
o bien, que:
q sea verdadera y
p falsa.

136

Atención.

Una proposición de la forma

$p \vee q$

será

falsa,

cuando:

_____

p y q
sean ambas verdaderas
o ambas falsas

137

La proposición

7 es un número par $\underline{\vee}$ *7 es un número impar*

es _____
verdadera/falsa

porque:

_____

verdadera

una de las proposiciones componentes es verdadera y la otra es falsa.

En efecto:

7 es un número impar es verdadera,
y
7 es un número par es falsa.

138

La proposición

$$\frac{3}{4} \in Q \veebar \frac{3}{4} \in Z^*$$

es [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

(*) $Q = \{x/x \text{ es un número racional}\}$ $Z = \{x/x \text{ es un número entero}\}$

verdadera

una de las proposiciones componentes es verdadera y la otra falsa.

En efecto:

$\frac{3}{4} \in Q$ es verdadera,
y
$\frac{3}{4} \in Z$ es falsa.

139

La proposición

$$3 + 2 = 5 \veebar 5 > 0$$

es [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

falsa

ambas proposiciones componentes son verdaderas.

En efecto:

$3+2=5$ y $5>0$ son ambas verdaderas.

140

La proposición

$$3 < 0 \vee 0 = 5$$

es [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

falsa

ambas proposiciones componentes son falsas.

En efecto:

$3<0$ y $0=5$ son ambas falsas.

141

La proposición

México está en América $\veebar$ *México está en Europa*

es [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

verdadera

una de las proposiciones componentes es verdadera y la otra falsa.

México está en América
es verdadera,
México está en Europa es falsa.

142

La proposición

Cuernavaca está en México $\veebar$ *Cuernavaca está en América*

es [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

falsa

ambas proposiciones componentes son verdaderas

143

La proposición

México está en Europa $\veebar$ *México está en África*

es [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

falsa

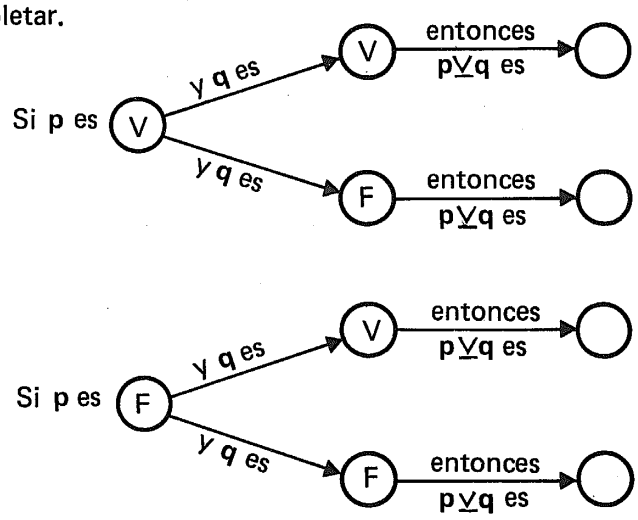
ambas proposiciones componentes son falsa.

3.1.5.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

144

Completar.



F

V

V

F

145

Tabla de verdad de la disyunción exclusiva

p	q	p ⊻ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

146

Estudiemos con atención.

Disyunción inclusiva

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva

p	q	p ⊻ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

147

	Valor de verdad	
p: $10 > 10$		F
q: $10 = 10$		V
$p \vee q$:		$10 > 10 \vee 10 = 10$ V
$p \veebar q$:		$10 > 10 \veebar 10 = 10$ V

148

	Valor de verdad	
p: $7 > 5$		V
q: $7 = 7$		V
$\sim p$:		$7 \not> 5$ F
$\sim q$:		$7 \neq 7$ F
$p \vee q$:		$7 > 5 \vee 7 = 7$ V
$p \vee \sim q$:		$7 > 5 \vee 7 \neq 7$ V
$\sim p \vee q$:		$7 \not> 5 \vee 7 = 7$ V
$\sim p \vee \sim q$:		$7 \not> 5 \vee 7 \neq 7$ F

149

p: $7 > 5$ V

q: $7 = 7$ V

$\sim p$: $7 \not> 5$ F

$\sim q$: $7 \neq 7$ F

$p \veebar q$: ┌──────┘ └──┘

$p \veebar \sim q$: ┌──────┘ └──┘

$\sim p \veebar q$: ┌──────┘ └──┘

$\sim p \veebar \sim q$: ┌──────┘ └──┘

$7 > 5 \veebar 7 = 7$ F

$7 > 5 \veebar 7 \neq 7$ V

$7 \not> 5 \veebar 7 = 7$ V

$7 \not> 5 \veebar 7 \neq 7$ F

3.1.5.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

150

Completar las siguientes tablas de verdad.

p	q	$\sim p$		$\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \veebar \sim q$

p	q		$\sim q$	$p \veebar \sim q$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	∼p		∼p ∨ q
V	V	F		V
V	F	F		F
F	V	V		V
F	F	V		V

p	q	∼p	∼q	∼p ∨ ∼q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

p	q	∼p	∼q	∼p $\underline{\vee}$ ∼q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F

p	q		∼q	p $\underline{\vee}$ ∼q
V	V		F	V
V	F		V	F
F	V		F	F
F	F		V	V

151

Construir la tabla de verdad de **p ∨ ∼p**

p	∼p	p ∨ ∼p
V	F	V
F	V	V

152

Construir la tabla de verdad de **p $\underline{\vee}$ ∼p**

p	∼p	p $\underline{\vee}$ ∼p
V	F	V
F	V	V

153

Vemos que
cualquier proposición compuesta
de
alguna de las formas lógicas

$p \vee \sim p$
o
$p \underline{\vee} \sim p$

es [verdadera/falsa]

p	∼p	p ∨ ∼p
V	F	V
F	V	V

p	∼p	p $\underline{\vee}$ ∼p
V	F	V
F	V	V

verdadera

154

Soy o no soy,

es una proposición [verdadera/falsa]
por su forma lógica.

verdadera

155

Puko colige melito **o** *Puko* **no** *colige melito.*

es una proposición [verdadera/falsa]
por su forma lógica,
independientemente
de su contenido.

verdadera

3.1.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* las formas lógicas binarias: disyunción inclusiva y disyunción exclusiva;
- *construir* las tablas de verdad de la disyunción inclusiva y de la disyunción exclusiva;
- *representar* simbólicamente una disyunción (inclusiva o exclusiva).

1.6

La condicional

156

Ahora, vamos a ligar
las proposiciones:

Pedro juega futbol
Gabriel se dedica al estudio

por medio del conectivo lógico

si...entonces

para obtener la proposición compuesta:

Si *Pedro juega futbol* entonces *Gabriel se dedica al estudio.*

157

El conectivo lógico

si...entonces

determina la forma lógica binaria
que llamaremos

condicional.

158

Fórmula de la condicional

$p \Rightarrow q$

que leemos:

"si p entonces q"

159

De modo que la expresión

Pedro juega futbol ⇒ *Gabriel se dedica al estudio*

deberá leerse:

Si *Pedro juega futbol* entonces *Gabriel se dedica al estudio.*

160

En la condicional $p \Rightarrow q$

a la proposición **p**
le llamamos:

antecedente,

y

a la proposición **q**:

consecuente.

161

Podemos escribir, entonces, para la forma condicional:

Si antecedente entonces consecuente.

162

En la forma lógica

Si p entonces q

se suele llama a **p: hipótesis**

y a **q: tesis,**

con lo que la condicional puede también escribirse:

└_____┘

Si hipótesis entonces tesis

163

En la proposición

Si tengo dinero entonces iré al cine

el antecedente o hipótesis es: └_____┘

el consecuente o tesis es: └_____┘

tengo dinero

iré al cine

164

Ahora bien,

¿qué debemos entender cuando yo digo:

Si tengo dinero entonces iré al cine?

165

En el lenguaje usual,
acostumbramos dar a una proposición del tipo

Si tengo dinero entonces iré al cine,

el sentido de :

Tengo dinero es la causa o razón para
iré al cine.

es decir que:

Tengo dinero es la causa,
Iré al cine es el efecto.

166

Tal como la vamos a definir aquí,
una proposición de la forma

si p entonces q

no llevará forzosamente implícita
una

relación de causa-efecto

entre el antecedente y el consecuente.

167

Será válido formar
una proposición de la forma

si p entonces q

con dos proposiciones simples
cuyos contenidos no tengan entre sí
nada que ver.

Por ejemplo, con las proposiciones
México está en América
2 + 2 = 4
nos será posible formar la proposición condicional:

_____

Si México está en América
entonces 2 + 2 = 4

168

La proposición

Si tengo dinero entonces iré al cine

debemos entenderla así:

Si se cumple el antecedente (*tengo dinero*)
entonces se cumple el consecuente (*iré al cine*).

Si es cierto que *tengo dinero*
entonces es cierto que *iré al cine.*

169

Vamos a convenir
en asignar
a una proposición de la forma:

si p entonces q

los valores de verdad
dados en la tabla del cuadro siguiente,
en función de
los valores de verdad
asignados a las proposiciones
p y q.

170

Estudiar con atención.

Tabla de verdad de la condicional

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

171

Si la proposición
tengo dinero

es **verdadera,**
la proposición
Iré al cine
tendrá que ser **verdadera**

para que la condicional

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

sea **verdadera.**

172

De acuerdo con lo anterior,
supongamos que yo declaro:

si tengo dinero entonces iré al cine

¿podrá calificarme de mentiroso,
alguien que sabiendo que tengo dinero
me ve en el cine?

Sí/No

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

No

173

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

Se cumple
es decir: es V

Se cumple
es decir: es V

Se cumple
es decir: es V.

174

Yo afirmo:

si tengo dinero entonces iré al cine

¿podrá calificarme de mentiroso
alguien que sepa que
teniendo yo dinero
no cumplí con ir al cine?

Sí/No

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

↓

Sí

175

Completemos el esquema de la situación
del cuadro anterior.

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

Se cumple es V

No se cumple es F

No se cumple; es F

176

Ahora, yo afirmo:

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

pero, sucede que
no se cumple que tenga dinero
y sin embargo voy al cine, utilizando
un pase de cortesía o qué se yo.

¿Me hago acreedor, por ese hecho, al calificativo de mentiroso?

Sí/No

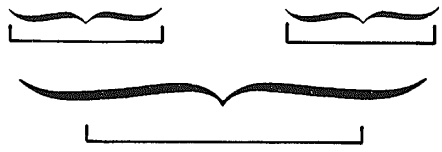
p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

No

177

Esquemáticamente.

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

No se cumple
es F

Se cumple,
es V

Se cumple,
es V

178

Finalmente, yo aseguro que:

si tengo dinero entonces iré al cine:

pero, sucede que
ni tengo dinero ni voy al cine.

Mi aseveración es [verdadera/falsa]

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

verdadera

179

Vemos que la proposición:

si tengo dinero entonces iré al cine

es falsa
solamente cuando,
siendo verdadero el antecedente (*tengo dinero*)
es falso el consecuente (*iré al cine*).

180

A la luz de lo anterior, y de acuerdo con nuestros conocimientos en las áreas de Geografía y Matemática, la proposición

Si *México está en América*
entonces $2 + 2 = 4$

es [ ]
verdadera/falsa

puesto que
[ ]

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

verdadera

siendo verdadero el antecedente (*México está en América*), es verdadero el consecuente ($2 + 2 = 4$).

181

La proposición

Si *México está en América*
entonces $5 = 3$

es [ ]
verdadera/falsa

porque [ ]

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

falsa

siendo verdadero el antecedente (*México está en América*) es falso el consecuente ($5 = 3$).

182

La proposición

Si *México está en Europa,*
entonces *8 es un número entero*

es [ ]
verdadera/falsa

porque [ ]

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

verdadera

siendo falso el antecedente (*México está en Europa*) es verdadero el consecuente (*8 es un número entero*).

183

La proposición

Si *México está en Asia*
entonces *3 es un número par*

es [ ]
verdadera/falsa

porque [ ]

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

verdadera

siendo falso el
antecedente
(*México está en Asia*)
es falso el consecuente
(*3 es un número par*).

3.1.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

184

Ahora bien,
la proposición

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

puede ser expresada
en alguna de estas
otras formas:

Si tengo dinero, iré al cine.
Iré la cine, si tengo dinero.

185

En general,
una proposición de la forma

$p \Rightarrow q$

puede ser expresada, en lenguaje común,
en alguna de estas formas:

Si p entonces q

└──────┘

└──────┘

Si p, q

q, si p

186

Atención.

La proposición:

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine*

podemos también interpretarla así:

Basta (o es suficiente) que *yo tenga dinero*
para que *vaya al cine.*

187

En

$p \Rightarrow q$

decimos que:

p **es condición suficiente para** q

o bien que:

el antecedente
es condición suficiente
para el consecuente

188

Atención.

Por otro lado,

es necesario

(o es preciso) que yo vaya al cine
en el caso de tener dinero
para que se cumpla la proposición:

Si *tengo dinero* entonces *iré al cine.*

189

Decimos que, en

$$p \Rightarrow q$$

el consecuente

es condición necesaria

para el antecedente.

Esto podemos expresarlo así:

p, sólo si q

190

Estudiar con atención.

Una proposición de la fórmula

$p \Rightarrow q$

puede ser expresada en alguna de las siguientes formas:

- si p entonces q
- si p, q
- q, si p
- p es condición suficiente para q
- q es condición necesaria para p

191

La proposición de la fórmula

$$p \Rightarrow q$$

en que:

p: (tú) estudias
q: (tú) aprobarás el curso

puede ser expresada:

- [ ]
- [ ]
- [ ]
- [ ]
- [ ]

Por ejemplo:

- Si estudias, entonces aprobarás el curso
- Si estudias, aprobarás el curso
- Aprobarás el curso, si estudias
- Es suficiente que estudies para que apruebes el curso
- Es necesario que apruebes el curso si estudias

3.1.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

192

Consideremos la proposición

Si *México está en Europa*
entonces *2 + 2 = 4*

que es [ ]
verdadera/falsa

porque

[ ]

verdadera

siendo el antecedente falso (*México está en Europa*) el consecuente es verdadero ($2 + 2 = 4$)

Ver tabla de verdad de $p \Rightarrow q$

193

Si México está en Europa entonces 2 + 2 = 4

Formemos, ahora, otra proposición intercambiando el antecedente y el consecuente:

_____

Si *2 + 2 = 4* entonces México está en Europa

194

Si México está en Europa entonces 2 + 2 = 4

Si 2 + 2 = 4 entonces México está en Europa

La segunda proposición es _____
verdadera/falsa

porque

_____

falsa

Siendo verdadero el antecedente (*2 + 2 = 4*) es falso el consecuente (*México está en Europa*)

195

A la proposición

q ⇒ p

le llamaremos

recíproca

de la proposición

p ⇒ q

y viceversa.

196

Por ejemplo

la

recíproca

de la proposición

Si estudias entonces aprendes

es la proposición:

└_____┘

Si aprendes, entonces estudias

197

Completar las tablas de verdad de $p \Rightarrow q$ y de $q \Rightarrow p$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Respuesta en el cuadro siguiente.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Observamos que las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ tienen diferentes tablas de verdad, decimos que:

$p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ no son

proposiciones equivalentes.

198

p: México está en Europa

q: $2 + 2 = 4$

$p \Rightarrow q$: Si México está en Europa entonces $2 + 2 = 4$

$q \Rightarrow p$: Si $2 + 2 = 4$ entonces México está en Europa

Formemos, ahora, la proposición:

$\sim q \Rightarrow \sim p$: _____

Si $2 + 2 \neq 4$ entonces México no está en Europa

199

Dar los valores de verdad.

p: México está en Europa.	V/F	F
q: $2 + 2 = 4$	V/F	V
$p \Rightarrow q$: Si México está en Europa, entonces $2 + 2 = 4$	V/F	V
$q \Rightarrow p$: Si $2 + 2 = 4$ entonces México está en Europa	V/F	F
$\sim q \Rightarrow \sim p$: Si $2 + 2 \neq 4$ entonces México no está en Europa	V/F	V

200

$q \Rightarrow p$

es la

recíproca

de

$p \Rightarrow q$

Llamaremos a

$\sim q \Rightarrow \sim p$

la

contrarrecíproca

de

$p \Rightarrow q$

201

Completemos:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

202

Comparemos las tablas de verdad
que hemos obtenido para

$p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ y $\sim q \Rightarrow \sim p$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Observamos que [ ]

$p \Rightarrow q$ y $\sim q \Rightarrow \sim p$
tienen tablas de verdad
iguales.

203

Decimos que
las formas lógicas

$p \Rightarrow q$

y

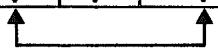
$d\sim \Leftarrow b\sim$

son

equivalentes

porque
tienen tablas de verdad iguales.

p	q	p ⇒ q	q ⇒ p	∼q ⇒ ∼p
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V



204

La proposición

Si estudias entonces aprendes

es equivalente a la proposición:

└──────────────────────┘

Si no aprendes, entonces no estudias

205

Sea la proposición

$x \in Z \Rightarrow x \in Q$

Su

recíproca

es: └──────────┘

$x \in Q \Rightarrow x \in Z$

Su

contrarrecíproca

es: └──────────┘

$x \notin Q \Rightarrow x \notin Z$

206

- $x \in Z \Rightarrow x \in Q$
- $x \in Q \Rightarrow x \in Z$
- $x \notin Q \Rightarrow x \notin Z$

Son

equivalentes

las proposiciones:

└──────────┘

y └──────────┘

$x \in Z \Rightarrow x \in Q$
$x \notin Q \Rightarrow x \notin Z$

207

Ahora, dada la proposición:

$\mathbf{p \Rightarrow q}$

consideremos la proposición:

$\mathbf{\sim p \Rightarrow \sim q}$

y su correspondiente tabla de verdad.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$

→

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Llamaremos a $\sim p \Rightarrow \sim q$
la

inversa

de $p \Rightarrow q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

208

Ahora, pongamos juntas las cuatro tablas de verdad que hemos obtenido.

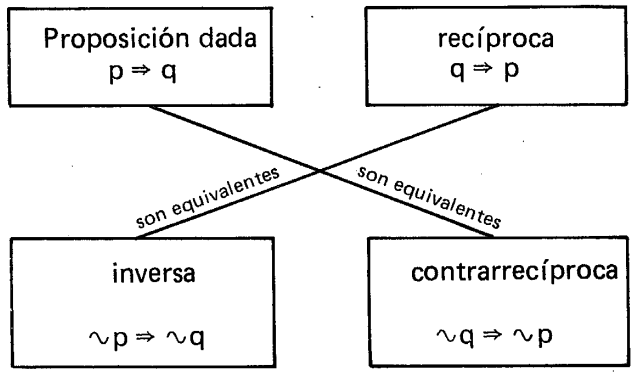
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Observamos que

son equivalentes las formas:
$p \Rightarrow q$ y $\sim q \Rightarrow \sim p$,
y las formas:
$q \Rightarrow p$ y $\sim p \Rightarrow \sim q$

209

Estudiemos con mucha atención el siguiente esquema resumen.



210

Una proposición: *Si trabajo, entonces me canso*

Su recíproca:

Su inversa:

Su contrarrecíproca:

Si me canso, entonces trabajo

Si no trabajo, entonces no me canso

Si no me canso, entonces no trabajo

211

1. Proposición dada: *Si trabajo, entonces me canso.*

2. Recíproca: *Si me canso, entonces trabajo.*

3. Inversa: *Si no trabajo, entonces no me canso.*

4. Contrarrecíproca: *Si no me canso, entonces no trabajo.*

Son equivalentes las propocisiones ⌊__⌋ y ⌊__⌋
y las proposiciones ⌊__⌋ y ⌊__⌋

1 4
2 3

212

Observemos con atención
que la proposición:

Si trabajo, entonces me canso

no es equivalente

a la proposición

Si no trabajo, entonces no me canso.

3.1.6.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

3.1.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* la forma lógica binaria llamada condicional;
- *dar* la tabla de verdad de la condicional;
- *representar* simbólicamente una condicional;
- *dar* el valor de verdad de una proposición condiconal, a partir de los valores de verdad de las proposiciones simples componentes;
- *dar* las diversas formas en que una proposición de la forma $p \Rightarrow q$ puede ser expresada en lenguaje común;
- *dar* la recíproca, la inversa y la contrarrecíproca de una proposición condicional dada, señalando las proposiciones que son equivalentes.

1.7

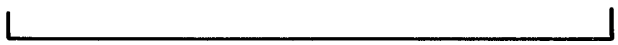
La bicondicional

213

Sea la proposición condicional

Si México está en América, entonces 2 + 2 = 4

y su recíproca:



Si 2 + 2 = 4, entonces México está en América

214

La consideración simultánea de las dos proposiciones:

- *Si México está en América, entonces 2 + 2 = 4*
- *Si 2 + 2 = 4, entonces México está en América*

nos lleva a la

conjunción

de ambas:

Si México está en América, entonces 2 + 2 = 4; y si 2 + 2 = 4, entonces México está en América.

215

Sean

p:

México está en América;

q:

$2 + 2 = 4$.

La fórmula de la conjunción de las proposiciones del cuadro anterior es:

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

216

A la forma lógica representada por la fórmula

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

le llamamos

bicondicional.

217

Una proposición

bicondicional

es la conjunción
de una proposición condicional
y su recíproca

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

218

En forma compacta,
expresaremos la bicondicional

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

en la forma:

$$p \Leftrightarrow q$$

que leeremos:

"p si, y sólo si q"

219

Atención.

Deberemos interpretar
una proposición de la forma

$$\mathbf{p \Leftrightarrow q}$$

"p si, y sólo si q"

de esta manera:

si p es verdadera, q tendrá que ser verdadera,
y
si q es verdadera, p tendrá que ser verdadera.

220

Atención.
Recordemos que
una proposición de la forma:

$$\mathbf{p \Rightarrow q}$$

la interpretamos así:

si p es verdadera, q tendrá que ser verdadera,

pues, de no ser así,
la proposición

$$\mathbf{p \Rightarrow q}$$

es [verdadera/falsa]

falsa

221

La tabla de verdad de $p \Rightarrow q$, que tenemos que completar,

p	q	p ⇒ q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

nos dice que
una proposición de tal forma es falsa sólo cuando

V
F
V
V

el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) es falso

222

Construyamos la tabla de verdad de $p \Leftrightarrow q$

es decir de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

p	q	p ⇒ q	q ⇒ p	(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Tabla de verdad de la bicondicional.

$p \Leftrightarrow q$

p	q	p ⇒ q	q ⇒ p	(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

223

Atención.

Para que
una proposición de la forma

$p \Leftrightarrow q$

sea verdadera
se requiere que

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ambas proposiciones (p y q) sean verdaderas o bien que, ambas sean falsas.

224

Por ejemplo,
la proposición

México está en América $\Leftrightarrow 2 + 2 = 4$

que se lee:

México está en América si, y sólo si $2 + 2 = 4$

es

verdadera

verdadera/falsa

porque

ambas proposiciones: *México está en América*, y $2 + 2 = 4$ son verdaderas.

225

La proposición

México está en Europa $\Leftrightarrow 2 + 2 \neq 4$

que se lee:

México está en Europa si, y sólo si $2 + 2 \neq 4$

es

verdadera

verdadera/falsa

porque

ambas proposiciones: *México está en Europa* y $2 + 2 \neq 4$ son falsas.

226

La proposición

México está en Europa ⇔ $2 + 2 = 4$

que se lee:

[ ]

es [ ]
verdadera/falsa

porque

[ ]

México está en Europa si, y sólo si $2 + 2 = 4$

falsa

una de las dos proposiciones componentes, $(2 + 2 = 4)$, es verdadera y la otra (*México está en Europa*) es falsa.

3.1.7.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

227

Ahora bien,
hemos visto que
una proposición de la forma

p ⇒ q

puede interpretarse así:

p es condición [ ] para **q**

o bien,

q es condición [ ] para **p**

suficiente

necesaria

228

Atención.

Una proposición de la forma

$p \Leftrightarrow q$

podrá ser interpretada así:

p es **condición suficiente y necesaria** para q;

o bien,

q es **condición suficiente y necesaria** para p.

229

Señalar la opción correcta y completar.

Las proposiciones

$p \Leftrightarrow q$

$q \Leftrightarrow p$

son/no son equivalentes,

como puede desprenderse de sus tablas de verdad.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

son

3.1.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* la forma lógica binaria llamada bicondicional;
- *dar* la tabla de verdad de la bicondicional;
- *representar* simbólicamente una bicondicional;
- *dar* el valor de verdad de una proposición bicondicional, a partir de los valores de verdad asignados a las proposiciones simples componentes.

1.8

Fórmulas y tablas de verdad de proposiciones compuestas

230

Hemos estudiado las siguientes formas lógicas:

- Negación: $\sim p$
- Conjunción: $p \wedge q$
- Disyunción inclusiva: $p \vee q$
- Disyunción exclusiva: $p \veebar q$
- Condicional: $p \Rightarrow q$
- Bicondicional: $p \Leftrightarrow q$

en que

p y **q** son **proposiciones simples.**

231

Ahora bien,
con los conectivos $\sim, \wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$

podemos establecer

fórmulas

para proposiciones compuestas
en que los componentes
son, a su vez,
proposiciones compuestas.

232

Hemos ya estudiado
el caso de una forma de proposiciones compuestas
en que
los componentes son proposiciones compuestas.

Los componentes
de la conjunción

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

son las proposiciones compuestas

└──────┘ y └──────┘

$p \Rightarrow q$ $q \Rightarrow p$

233

Para la formación
de
fórmulas de proposiciones compuestas
existen algunas

reglas sintácticas

semejantes
a las utilizadas
para la
formación de expresiones algebraicas.

234

Hemos visto que
la fórmula de una negación,
en que
la componente es una proposición simple
representada por la literal
p
tiene el siguiente aspecto:

└──────┘

$\sim p$

235

Intentemos, ahora,
escribir la fórmula
de una negación
en que
la componente
es la proposición compuesta

$p \wedge q$

└_____┘

$\sim (p \wedge q)$

236

Observemos que,
sin el uso del paréntesis,
la proposición

$\sim p \wedge q$

puede ser interpretada
como

└_____┘

la conjunción de $\sim p$ y q

237

Entonces, en la proposición $p \wedge q$

si queremos negar únicamente a **p**

escribimos └_____┘

$\sim p \wedge q$

si queremos negar únicamente a **q**

escribimos └_____┘

$p \wedge \sim q$

Y si queremos negar la proposición compuesta $p \wedge q$,

debemos escribir └_____┘

$\sim (p \wedge q)$

238

Intentemos escribir
la fórmula
para la negación de una proposición compuesta
de la forma

$\sim p \wedge \sim q$

$\sim(\sim p \wedge \sim q)$

239

Escribamos
la fórmula
de la doble negación
de una proposición de la forma

$p \Rightarrow q$

$\sim\sim(p \Rightarrow q)$

240

Vamos a intentar
escribir
la fórmula de la negación de la proposición

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$\sim [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

241

Lo que queremos negar, ahora,
es la proposición compuesta

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow p$$

└──────────────────────┘

$\sim\{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow p\}$

242

Hemos escrito
la fórmula para la

conjunción

de dos proposiciones simples (p, q)
en esta forma:

└──────┘

$p \wedge q$

243

La fórmula para la conjunción
de tres proposiciones simples (p, q, r)
podrá ser escrita así:

└──────┘

$p \wedge q \wedge r$

244

Fórmula para la

disyunción inclusiva

de las cuatro proposiciones simples p, q, r, s:

$p \vee q \vee r \vee s$

245

Intentemos escribir
la fórmula de la

disyunción exclusiva

de las proposiciones compuestas:

- $p \Rightarrow q$
- $r \Rightarrow s$

$(p \Rightarrow q) \veebar (r \Rightarrow s)$

246

Necesitamos escribir
la fórmula
de la proposición condicional
cuyo antecedente es $p \wedge q$
y cuyo consecuente es $\sim r \vee s$

$(p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \vee s)$

247

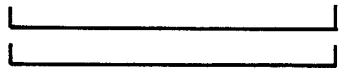
Una proposición

bicondicional

relacionando las dos proposiciones

- $r \wedge s \wedge t$
- $p \Rightarrow q$

puede ser representada por alguna
de las fórmulas:



$(r \wedge s \wedge t) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \wedge s \wedge t)$

248

Con estas ideas en mente,
podemos escribir fórmulas
para proposiciones cada vez más complejas.

3.1.8.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

249

Hemos aceptado que:
a una proposición simple
puede asignársele
uno de los siguientes valores de verdad:

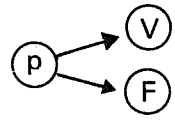
[_____] [_____]

verdadero (V)
falso (F)

250

Una proposición simple

p



puede, entonces,
ser: verdadera o falsa.

251

Ahora bien,
para una proposición compuesta
de la forma lógica monaria

$\sim p$

existirán [_____] combinaciones de valores de verdad, 2
por lo que
su tabla de verdad consistirá de [_____] renglones. 2

252

La tabla de verdad de una forma lógica monaria como la negación, consiste de 2 renglones.

Hay 2 combinaciones de valores de verdad posibles:

p	$\sim p$
V	F
F	V

1. p verdadera.
2. p falsa

253

Para una forma lógica binaria, como por ejemplo,

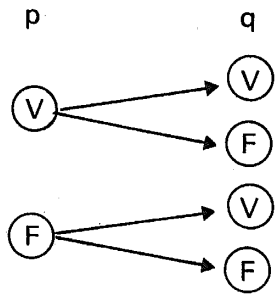
$p \wedge q$

existen 4 combinaciones de valores de verdad que son:

1. p verdadera y q verdadera.
2. p verdadera y q falsa.
3. p falsa y q verdadera.
4. p falsa y q falsa.

254

Estudiemos con atención este esquema.



Las 4 combinaciones de valores de verdad de una forma lógica binaria (con dos proposiciones simples o **variables; p, q**)

255

La tabla de verdad de una forma lógica binaria (p ⊙ q)* tendrá [_____] renglones.

Bosquejar la tabla de verdad de una forma lógica binaria

p o q

*⊙ indica cualquiera de los conectivos lógicos estudiados exceptuando ∿.

4

p	q	p ⊙ q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

256

En una forma lógica con 3 proposiciones simples o variables (p, q, r) son posibles [_____] combinaciones de valores de verdad, que son:

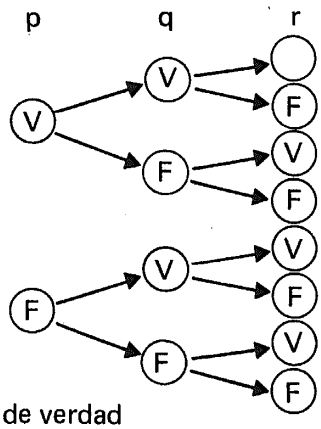
[_____]

8

1. p verdadera, q verdadera y r verdadera.
2. p verdadera, q verdadera y r falsa.
3. p verdadera, q falsa y r verdadera.
4. p verdadera, q falsa y r falsa.
5. p falsa, q verdadera y r verdadera.
6. p falsa, q verdadera y r falsa.
7. p falsa, q falsa y r verdadera.
8. p falsa, q falsa y r falsa.

257

Atención.



Las 8 combinaciones de valores de verdad de una forma lógica con 3 proposiciones simples o variables.

258

Si conservamos el orden
de las combinaciones de
valores de verdad
que hemos venido sugiriendo,
las primeras tres columnas
de la tabla de verdad
de una proposición compuesta
con 3 variables (p, q, r)
tendría el aspecto mostrado.

p	q	r

Observar con atención.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

259

Atención.

● Número de combinaciones de valores de verdad = número de renglones de la tabla de verdad.

Para **1** variable: **2** o sea: 2^1

Para **2** variables: **4** o sea: 2^2

Para **3** variables: **8** o sea: 2^3

Para **x** variables: ⌊___⌋

2^x

260

Si aceptamos la conjetura del cuadro anterior,
podemos calcular el número **n**
de renglones de la tabla de verdad
para una forma lógica
conteniendo **x** variables o proposiciones simples,
por medio de la expresión:
⌊_____⌋

$n = 2^x$

261

Por ejemplo,
el número de renglones
de la
tabla de verdad
para una
forma lógica
conteniendo
4
variables
es igual a
└_____┘

16 (2^4)

262

Indiquemos
las
16 combinaciones
de valores de verdad
de una
proposición compuesta
de
4 variables o
proposiciones simples:
p, q, r, s.

p	q	r	s

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

263

Ahora bien,
se requiere construir
la tabla de verdad
de una proposición compuesta
de la forma

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q.$$

264

Observemos que
la proposición

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

considerada como un todo,
pertenece a la forma binaria
que hemos llamado

└_____┘

condicional

265

En la proposición condicional

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

el antecedente es └_____┘

y

el consecuente es └_____┘

$[(p \vee q) \wedge \sim p]$

q

266

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

El antecedente de esta proposición condicional
es una └_____┘

indicar la forma lógica binaria

cuyos componentes son:

└_____┘ y └_____┘

conjunción

$(p \vee q)$ $\sim p$

267

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

Hemos encontrado que:
el antecedente de la condicional representada por la fórmula mostrada es una conjunción de dos proposiciones: $(p \vee q)$ y $\sim p$.

La primera componente de esta conjunción es una proposición compuesta perteneciente a la lógica binaria que hemos llamado

[ ]

y
la segunda componente es una [ ]

disyunción inclusiva

negación

268

Observar con atención.

Condicional

- antecedente: $[(p \vee q) \wedge \sim p]$
- consecuente: q

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

- disyunción inclusiva de las proposiciones simples: p, q
- negación de la proposición simple: p
- conjunción de las proposiciones compuestas $p \vee q$ y $\sim p$

269

Después del anterior análisis,
intentemos dar una secuencia de operaciones para la obtención de la tabla de verdad de la proposición compuesta

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

Obtención de la tabla de verdad de

1. [ ]
2. [ ]
3. [ ]
4. [ ]

$p \vee q$

$\sim p$

$(p \vee q) \wedge \sim p$

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

270

La tabla de verdad
de la proposición compuesta

$$[(p \vee q) \vee \sim p] \Rightarrow q$$

Tendrá ⌊_____⌋ renglones,
puesto que el número de variables o
proposiciones simples es igual a ⌊___⌋

4 (2^2)

2

271

Un posible esquema
para la elaboración de la tabla de verdad
de

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

Llenemos las primeras dos columnas.

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Indiquemos, ahora, los valores de verdad
de la tercera columna.

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V	V			
V	F	V			
F	V	V			
F	F	F			

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V	V	F		
V	F	V	F		
F	V	V	V		
F	F	F	V		

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V	V	F	F	
V	F	V	F	F	
F	V	V	V	V	
F	F	F	V	F	

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	p ∨ q	∼p	(p ∨ q) ∧ ∼p	[(p ∨ q) ∧ ∼p] ⇒ q
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Podemos, ahora, dar la tabla de verdad de [(p∨q) ∧ ∼p] ⇒ q en esta forma compacta:

p	q	[(p ∨ q) ∧ ∼p] ⇒ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

3.1.8.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

3.1.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir* la fórmula de una proposición compuesta de dos o más proposiciones simples;
- *construir* la tabla de verdad de una proposición compuesta de dos o más proposiciones simples.

1.9

Tautología, contradicción y contingencia

273

Ya nos hemos podido dar cuenta
de que algunas

proposiciones compuestas

son

verdaderas por su forma lógica,

independientemente
de los
contenidos
de las proposiciones componentes.

274

Por ejemplo,

cualquier ejemplo de sustitución de
la fórmula

$$p \vee \sim p$$

es verdadero por su forma lógica, cualquiera
que sea el significado de la proposición **p**
como puede verse en la correspondiente
tabla de verdad.

Construir la tabla de verdad correspondiente.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

275

Daremos el nombre de

tautología

a una proposición compuesta
que es

verdadera

para cualquier combinación de
valores de verdad
de las proposiciones simples
que la forman.

276

Otro ejemplo de

tautología

es la proposición compuesta dada por
la fórmula

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

cuya tabla de verdad
hemos obtenido en el
submódulo anterior.

p	q	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

277

Otras proposiciones compuestas
son siempre

falsas

es decir,
tienen valor de verdad

falso

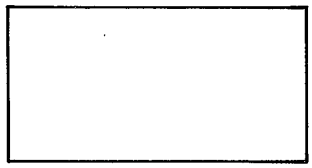
para cualquier combinación
de valores de verdad
de las proposiciones simples que
la constituyen.

278

Un ejemplo de proposición siempre falsa
es la representada por la fórmula

$$p \wedge \sim p$$

como podemos verlo a través de su
tabla de verdad:



p	∼p	p∧∼p
V	F	F
F	V	F

279

A una proposición compuesta
cuyo valor de verdad es siempre falso
le llamaremos

contradicción.

280

Finalmente,
algunas proposiciones compuestas
son algunas veces verdaderas y
algunas veces falsas,
dependiendo de los valores de verdad
asignados a las proposiciones simples
componentes.
Bautizaremos con el nombre de

contingencias

a tales proposiciones.

281

Resumen.

Tautología: Proposición compuesta con valor de verdad siempre **verdadero.**

Contradicción: Proposición compuesta con valor de verdad siempre **falso.**

Contingencia: Proposición compuesta con valor de verdad **verdadero** o **falso** dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones simples componentes.

282

Una proposición de la forma

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

es una [tautología/ contradicción/ contingencia]

de acuerdo con la tabla de verdad correspondiente:

tautología

p	q	p ∧ q	p ∧ q ⇒ p
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

283

Una proposición de la forma

$$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$$

es una [tautología/ contradicción/ contingencia]

como podemos verlo a través de su tabla de verdad:

Respuesta en el cuadro siguiente.

- contradicción

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

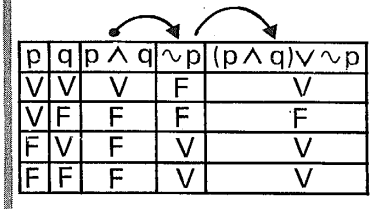
Una proposición de la forma

$$(p \wedge q) \vee \sim p$$

es una [tautología/ contradicción/ contingencia]

Tabla de verdad:

contingencia



p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \vee \sim p$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

3.1.9.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

3.1.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* una tautología, una contradicción y una contigencia;
- *determinar,* mediante la elaboración de la correspondiente tabla de verdad, si una proposición compuesta es una tautología, una contradicción o una contingencia.

1.10

Implicación lógica y equivalencia lógica

285

Consideremos la condicional

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

cuya tabla de verdad ya hemos obtenido.

p	q	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

286

Puesto que
todos los valores de verdad
de

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

son V,
decimos que
dicha condicional
es una

tautología

287

Atención.

Cuando una condicional
es una tautología
decimos que:
el antecedente
implica lógicamente
al consecuente
o que
la condicional es una

implicación lógica.

288

Puesto que sabemos que la condicional

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$$

es una tautología,
decimos que:

[_____]

o que

[_____]

$[(p \vee q) \wedge \sim p]$ implica lógicamente a q

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ es una implicación lógica

289

La proposición

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$$

es/no es

una implicación lógica,

porque

[_____]

no es

no es una condicional

290

Sea
la proposición

$$(p \vee q) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$$

cuya tabla de verdad es:

p	q	p ∨ q	p ∧ q	∼(p ∧ q)	(p ∨ q) ⇒ ∼(p ∧ q)
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V

291

La tabla de verdad de

$$(p \vee q) \Rightarrow \sim(p$$

nos indica que esta proposición

es/no es

una tautología,

porque

└_____┘

no es

no sucede que todos sus valores de verdad sean **V**

292

Entonces,
la proposición

$$(p \vee q) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$$

es/no es

una implicación lógica,

porque

└_____┘

no es

aunque la proposición dada es una condicional, no es una tautología

293

En la condicional

$$(p \vee q) \Rightarrow \sim (p \wedge q)$$

$(p \vee q)$

implica/no implica

lógicamente a $\sim(p \wedge q)$.

no implica

294

Consideremos la proposición

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

cuya tabla de verdad vamos a construir.

Respuesta en el cuadro siguiente.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

295

La proposición

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

es/ no es

una tautología,

porque

es

todos sus valores de verdad son: **V**

296

La proposición

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

es/ no es

una implicación lógica,

porque

es

es una condicional
y
una tautología

297

En

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

- $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$

implica/ no implica

lógicamente a $\sim p$.

implica

298

Recíprocamente,

si sabemos que la condicional $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
es una implicación lógica,
podemos decir que
dicha condicional es una tautología.

3.1.10.1

Práctica adicional
de
identificación de
implicaciones lógicas,
si se considera necesario.

299

Consideremos, ahora, la **bicondicional**

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

y su correspondiente tabla de verdad.

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

300

De la tabla de verdad del cuadro anterior,
se desprende que
la bicondicional

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

es/ no es

una tautología,

porque: [_____]

es

todos sus valores de verdad son **V**

301

A una

bicondicional

que es una

tautología

le llamaremos:

equivalencia lógica.

302

Entonces,
la bicondicional

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

es/ no es

una

equivalencia lógica,

porque: [_____]

es

es una tautología

303

Decimos que:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

es una equivalencia lógica

o que las proposiciones

$\sim(p \wedge q)$
y
$\sim p \vee \sim q$

son

lógicamente equivalentes.

304

El hecho de que

$\sim(p \wedge q)$
y
$\sim p \vee \sim q$

sean lógicamente equivalentes,
lo representaremos simbólicamente así:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

o así

$$\sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$$

305

La expresión

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

se lee:

"$\sim(p \wedge q)$

es lógicamente equivalente a

$\sim p \vee \sim q$".

306

Observemos que
las dos proposiciones que hemos definido como equivalentes, tienen la misma tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

307

Recíprocamente,

si dos proposiciones

tienen la **misma tabla de verdad**

decimos que

son lógicamente equivalentes.

308

Sabiendo que

$\sim(p \wedge q)$
y
$\sim p \vee \sim q$

tienen la misma tabla de verdad,
decimos que son [_____]

y podemos escribir simbólicamente:

[_____]

ó [_____]

lógicamente equivalentes

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

309

Ahora bien,
la proposición compuesta representada por la fórmula:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

es/ no es

una equivalencia lógica

porque: [_____]

no es

no es una bicondicional

310

La proposición

$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

es/ no es

una equivalencia lógica,

porque:

[_____]

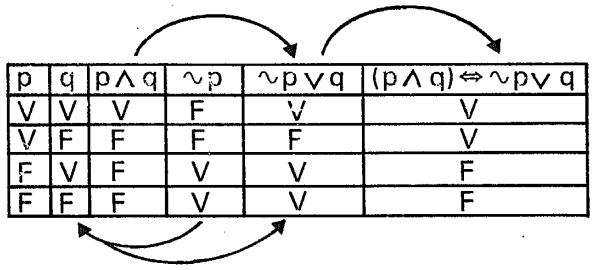
Ver tabla de verdad en el cuadro siguiente.

no es

aunque es una bicondicional, su tabla de verdad muestra que no es una tautología

(observamos, además, que las proposiciones $(p \wedge q)$ y $\sim p \vee q$ no tienen la misma tabla de verdad)

311



p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F

312

La proposición

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

es/ no es

una equivalencia lógica,

porque:

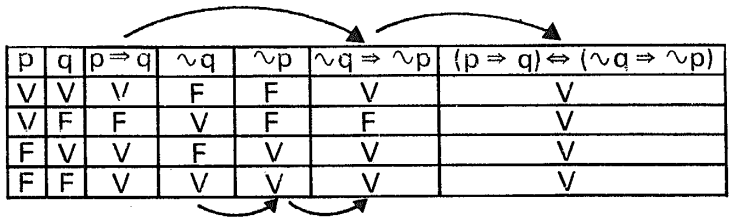
Ver tabla de verdad
en el cuadro siguiente

es

es una bicondicional y
su tabla de verdad muestra
que es una tautología

(observamos, también que
las tablas de verdad de
$(p \Rightarrow q)$ y $(\sim q \Rightarrow \sim p)$
son iguales)

313



p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

314

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

es una equivalencia lógica.

En otras palabras,

$(p \Rightarrow q)$ y $(\sim q \Rightarrow \sim p)$

son proposiciones [_____]

lógicamente equivalentes

315

Sabiendo que

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

es una equivalencia lógica,
o que

$p \Rightarrow q$ y $\sim q \Rightarrow \sim p$

son lógicamente equivalentes,
podemos escribir: [_____]

ó [_____]

$p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

$(\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv p \Rightarrow q$

3.1.10.2

Práctica adicional
de
identificación de
equivalencias lógicas,
si se considera necesario

316

Debemos recordar que,
para que una proposición sea una

implicación lógica

se requiere que dicha proposición sea [_____]

y además [_____]

una condicional

una tautología

317

Para que una proposición sea una

equivalencia lógica

se requiere que

[_____]

sea una bicondicional
y una tautología

318

Si

P ⇒ Q

(en que P y Q representan proposiciones cualesquiera)

es una implicación lógica,
decimos que:

P implica lógicamente a Q,

pero no que:

Q implica lógicamente a P.

319

Si

$P \Leftrightarrow Q$

es una equivalencia lógica,
decimos que

- **P y Q son lógicamente equivalentes;**
- **P es lógicamente equivalente a Q;**

o que:

- **Q es lógicamente equivalente a P.**

320

Si

$P \Leftrightarrow Q$

es una equivalencia lógica,
podemos escribir:

- $P \equiv Q$

o

- $Q \equiv P$

3.1.10

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de implicación lógica;
- *determinar* si una proposición compuesta dada por su fórmula es o no una implicación lógica;
- *dar* una definición de equivalencia lógica;
- *determinar* si una proposición compuesta dada por su fórmula es o no una equivalencia lógica;
- *determinar* si dos proposiciones dadas son lógicamente equivalentes;
- *representar* simbólicamente una equivalencia lógica.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de mayo de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

C EV KC 100